ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία Σχολικού Βιβλίου

Α2. Θεωρία Σχολικού Βιβλίου

Α3. Θεωρία Σχολικού Βιβλίου

Α4. α. Σ β. Λ γ. Σ δ. Σ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Επειδή $f(x+1)=(x+1)e^{-x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Θέτω όπου x το $x-1$

$f(x)=xe^{1-x}$

Β2. $f'(x)=e^{1-x}-xe^{1-x}=(1-x)e^{1-x}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$-\infty$ $\nearrow$		$\searrow$ 0

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{1-x}\right)=-\infty$$

διότι $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} \overset{u=1-x}{\underset{x\to-\infty\ u\to-\infty}{=\!=\!=}} \lim\limits_{u\to+\infty} e^{u}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}} \underset{DHL}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{x-1}}\right)=0$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ διότι $f'(x)>0$ για $x\in(-\infty,1)$ και είναι συνεχής στο $(-\infty,1]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ διότι $f'(x)<0$ για $x\in(1,+\infty)$ και είναι συνεχής $[1,+\infty)$

Έχει ολικό μέγιστο για $x=1$ το $f(1)=1$

B3. $f''(x) = -e^{1-x}(1-x)e^{1-x} = e^{1-x}(-1-1+x) = (x-2)e^{1-x}$

x	$-\infty$	2	$-\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	$\frac{2}{e}$	$\smile$

Η f είναι κοίλη στο $x \in (-\infty, 2]$ και κυρτή για $x \in [2, +\infty)$

Έχει σημείο καμπής για $x = 2$ το σημείο $\left(2, \frac{2}{e}\right)$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη

Επειδή $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη όταν $x \to +\infty$ την ευθεία $y = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x} = +\infty$ άρα δεν έχει πλάγια για $x \to -\infty$

B4. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα πάρει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ του $-\infty$ και του 1.

Άρα σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, 1]$

Έστω $A_1 = (-\infty, 1]$ τότε $f(A_1) = (-\infty, 1]$

και $A_2 = [1, +\infty)$ τότε $f(A_2) = (0, 1]$

- Αν $\lambda \le o$ τότε $\lambda \in f(A_1)$ και $\lambda \notin f(A_2)$ μια ρίζα
- Αν $0 < \lambda < 1$ τότε $\lambda \in f(A_1)$ και $\lambda \in f(A_2)$ δύο ρίζες
- Αν $\lambda = 1$ τότε μια ρίζα η $x = 1$
- Αν $\lambda > 1$ τότε $\lambda \notin f(A_1)$ και $\lambda \notin f(A_2)$ δεν έχει καμία ρίζα

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως πολυωνυμική και στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right]$ ως τριγωνομετρική.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\alpha x^3-3x^2-x+1\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sigma\upsilon\nu x)=1$ και $f(0)=1$ άρα

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

Άρα η f είναι συνεχής στο $\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$

Για $x<0$ $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{\alpha x^3-3x^2-x}{x}=\alpha x^2-3x-1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\alpha x^2-3x-1\right)=-1$

Για $0<x<\dfrac{3\pi}{2}$ $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$

Γ2. i. η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$

η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x)=-\eta\mu x$

$f(0)=1$ και $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=0$

Άρα δεν ισχύει η τρίτη συνθήκη του Θ. Rolle

ii. $f'(x)=0 \Leftrightarrow -\eta\mu x=0 \Leftrightarrow x=\kappa\pi \quad \kappa\in\mathbb{Z}$

$0<\kappa\pi<\dfrac{3\pi}{2}\Leftrightarrow 0<\kappa<\dfrac{3}{2}$ άρα $\kappa=1$ και $x=\pi$

Γ3. $f'(x)=3\alpha x^2-6x-1$

$\Delta=36+12\alpha=12(\alpha+3)<0$ διότι $\alpha<-3\Leftrightarrow \alpha+3<0$

Άρα $f'(x)\neq 0$ για $x<0$ επομένως δεν υπάρχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$

Γ4.

Για $x<0$

$f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1 < 0$ διότι $\Delta < 0$ και $3\alpha < 0$

Για $x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ $\quad f'(x) = -\eta\mu x$

	0	π	$\frac{3\pi}{2}$
		$-$ $\searrow$	$+$ 0 $\nearrow$
	1	-1	

x	$-\infty$		0		π		$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Ολικό ελάχιστο

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (\alpha x^3) = +\infty$

Άρα για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$ είναι $f(x) \geq -1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω $K(x) = \ln x - \frac{1}{x}$

- η $K(x)$ είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως πράξεις συνεχών
- $K(1) = -1,\ K(e) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$

Από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,3) : K(x_0) = 0$ και $K'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ για

$x \in (1, e)$

Άρα η $K(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και η ρίζα x_0 είναι μοναδική

Δ2. $f(x)=\ln x_0(x+1)-\ln x-1$

$$f'(x)=\ln x_0-\frac{1}{x}=\frac{1}{x_o}-\frac{1}{x}=\frac{x-x_0}{x\cdot x_0}$$

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Διότι

$$f(x_0)=\ln x_0\cdot(x_0+1)-\ln x_0-1=\ln x_0\cdot x_0+\ln x_0-\ln x_0-1=1-1=0$$

Δ3. Αρχικά θα δείξουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των g και h έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Για $x\le 0$ είναι $g(x)\le 0<h(x)$ άρα η εξίσωση $g(x)=h(x)$ είναι αδύνατη

Για $x>0$

Έχουμε

$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow xe^{-x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\Leftrightarrow xe^{-x}=\frac{x_0^{x+1}}{e^{x+1}}\Leftrightarrow xe^{-x}e^{x+1}=x_0^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow xe=x_0^{x+1}\Leftrightarrow \ln(xe)=\ln x_0^{x+1}\Leftrightarrow \ln x+\ln e=(x+1)\ln x_0$$

$$\Leftrightarrow(\ln x_0)(x+1)-\ln x-1=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x=x_0$$

Διότι από το Δ2 ερώτημα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=x_0$ το $f(x_0)=0$

Για να έχουν οι C_g και C_h κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο αρκεί να δείξουμε ότι

$$g'(x_0)=h'(x_0)$$

$$h'(x_0)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)=h(x_0)(\ln x_0-1)=h(x_0)\cdot\frac{1-x_0}{x_0}=g(x_0)\cdot\frac{1-x_0}{x_0}=$$

$$=e^{-x_0}(1-x_0)=g'(x_0)$$

Συνεπώς έχουμε ότι $g(x_0)=h(x_0)$ και $g'(x_0)=h'(x_0)$ άρα οι γραφικές παραστάσεις των C_g και C_h έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη

Δ4. Έστω $A(x,f(x))$ και $B(x,f(x))$ τότε

$$(AB)=\sqrt{(f(x)-\varphi(x))^2}=|f(x)-\varphi(x)|=f(x)-\varphi(x)\text{ διότι } f(x)>\varphi(x)$$

Έστω $d(x)=f(x)-\varphi(x)$

- Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε και η d είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $d'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0)$

  Επειδή x_0 εσωτερικό στο $(0,+\infty)$ και η d έχει ελάχιστο στο x_0 θα έχουμε

  $d'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = \varphi'(x_0) \Leftrightarrow 0 = \varphi'(x_0)$ άρα x_0 κρίσιμο σημείο της φ
- Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε επειδή είναι συνεχής στο x_0 τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ

Σχολιασμός θεμάτων

Τα θέματα κάλυπταν όλη την ύλη, ήταν διαβαθμισμένης δυσκολίας, με πιο απαιτητικά ερωτήματα το Δ3 ,Δ4.

Συγγραφική επιμέλεια

Ομάδα Μαθηματικών Ρόμβου