



ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. α. Σχολικό βιβλίο σελ. 15

β. Σχολικό βιβλίο σελ. 36

A2. Σχολικό βιβλίο σελ. 142

A3. Σχολικό βιβλίο σελ. 135

$$\text{Π.χ } f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \text{αλλά} \quad f'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

β. Λάθος

$$\text{Π.χ } f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \quad \text{αλλά} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$f(0) = 1$$

$$\text{A5. } \int_a^b f(x) dx = \Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 = 2 - 1 + 3 = 4$$

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = e^{-x} + \lambda$$

$$\text{B1. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + \lambda) = 0 + \lambda = \lambda, \text{ άρα } \lambda = 2$$

$$\text{B2. } h(x) = f(x) - x = e^{-x} + 2 - x$$

- $h(x)$ συνεχής στο $[2, 3]$
- $\left. \begin{array}{l} h(2) = e^{-2} > 0 \\ h(3) = e^{-3} - 1 < 0 \end{array} \right\} h(2)h(3) < 0$

Άρα εφαρμόζεται για την h το Θ. Bolzano στο $[2, 3]$ και άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2, 3)$:

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$$

$$h'(x) = -e^{-x} - 1 < 0 \text{ \u03b1\u03c1\u03b1 } h \text{ \u03c1\u03b7 } \text{ \u03c3\u03c4\u03bf } (2,3) \text{ \u03ba\u03b9 } 1-1$$

\u0386\u03c1\u03b1 x_0 \u03bc\u03bf\u03bd\u03b1\u03b4\u03b9\u03ba\u03b7 \u03c1\u03b9\u03b6\u03b1 \u03c4\u03b7\u03c3 $h(x) = 0$

B3. $f'(x) = -e^{-x} < 0$ f \u03c1\u03b7 \u03c3\u03c4\u03bf ' 1-1

$$f(x) = \psi \Leftrightarrow e^{-x} + 2 = \psi \Leftrightarrow e^{-x} = \psi - 2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \psi - 2 > 0 \\ \ln e^{-x} = \ln(\psi - 2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \psi > 2 \\ -x = \ln(\psi - 2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

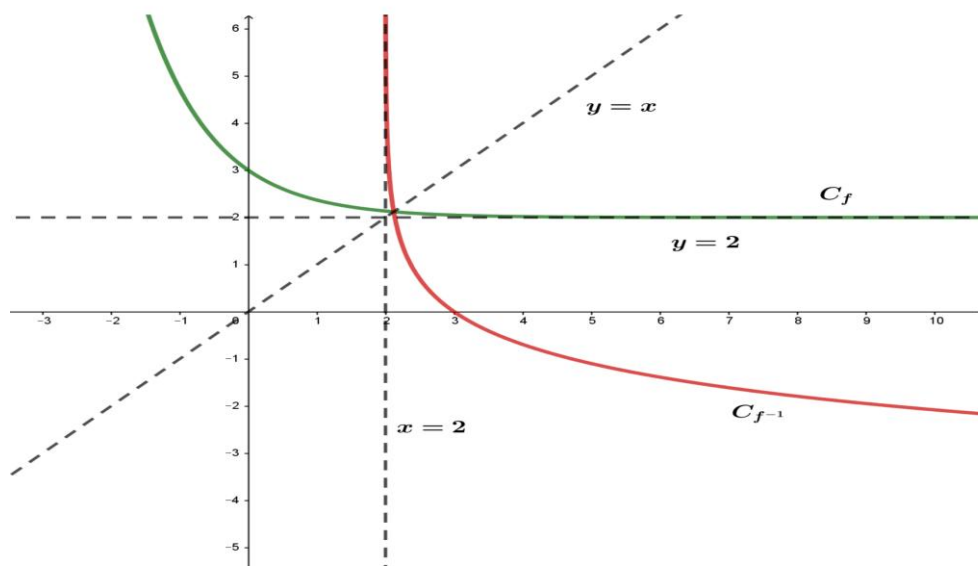
$$\left\{ \begin{array}{l} \psi > 2 \\ x = -\ln(\psi - 2) = f^{-1}(\psi) \end{array} \right\}$$

\u0386\u03b7\u03bb\u03b1\u03b4\u03b7 $f^{-1}(x) = -\ln(x - 2)$ \u03bc\u03b5 $x > 2$

B4. $f^{-1}(x) = -\ln(x - 2)$ $x > 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0 \text{ \u03b1\u03c1\u03b1 } \lim_{x \rightarrow 2^+} [-\ln(x - 2)] \stackrel{u=x-2}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 2^+ \\ u \rightarrow 0^+}} -\ln u = +\infty$$

\u0386\u03c1\u03b1 \u03b7 $x = 2$ \u03ba\u03c4\u03b1\u03ba\u03cc\u03c1\u03c5\u03c6\u03b7 \u03b1\u03c3\u03cd\u03bc\u03c0\u03c9\u03c4\u03b7 \u03c4\u03b7\u03c3 f



ΑΡΓΥΡΟΥΠΟΛΗ: • Κ\u03cd\u03c0\u03c1\u03bf\u03c5 51, \u03c4\u03b7\u03bb. 2109941471, 2109935566 • \u0393\u03b5\u03c1\u03bf\u03c5\u03bb\u03b1\u03bd\u03bf\u03c5 103, \u03c4\u03b7\u03bb. 2109911067

ΗΛ\u0399\u039e\u03a5\u03a0\u0391\u039d\u0397: • \u039d\u03b1\u03c5\u03b1\u03c1\u03b9\u03bd\u03bf\u03c5 12, \u03c4\u03b7\u03bb. 2109944396,

\u0393\u0391\u03a5\u03a6\u0391\u039b\u0391: \u0391. \u0392\u03bf\u03bb\u03b9\u03b1\u03b3\u03bc\u03b5\u03bd\u03b7\u03c3 147 & \u03a0\u03c1\u03b1\u03be\u03b9\u03c4\u03b5\u03bb\u03bf\u03c5\u03c3 2, \u03c4\u03b7\u03bb. 2109680008

email : support@romvos.edu.gr

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x > 1$ η f συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική
Για κάθε $x < 1$ η f συνεχής και παραγωγίσιμη ως άθροισμα τέτοιων
Οπότε πρέπει f να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x & x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + \alpha) = 1 + \alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} + \beta x) = 1 + \beta$$

$$f(1) = 1 + \alpha$$

Άρα $1 + \alpha = \beta + 1 \Rightarrow \alpha = \beta$, διότι f συνεχής

- Av $x < 1$: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - 1 - \alpha}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta}{1} = 1 + \beta$
- Av $x > 1$: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + \alpha - 1 - \alpha}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$

Άρα $1 + \beta = 2 \Rightarrow \beta = 1$, διότι f παραγωγίσιμη

Τελικά $\alpha = \beta = 1$

$$\Gamma 2. f'(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ e^{x-1} + 1 & x < 1 \end{cases}$$

Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \geq 1$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x < 1$ και f συνεχής στο $x_0 = 1$

Δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα f γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

διότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} \stackrel{u=x-1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow -\infty}} e^u = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty$$

Άρα $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Γ3. i. $0 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ άρα υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$: $f(x_0) = 0$ και f 1-1 άρα 1-1, τότε x_0 μοναδικό

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{e} > 0 \\ f(-1) &= e^{-2} - 1 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) \cdot f(-1) < 0$$

Άρα Θ. Bolzano $x_0 \in (-1, 0)$ ώστε $f(x_0) = 0$

Άρα η ρίζα είναι αρνητική

ΑΡΓΥΡΟΥΠΟΛΗ: • Κύπρου 51, τηλ. 2109941471, 2109935566 • Γερουλάνου 103, τηλ. 2109911067

ΗΛΙΟΥΠΟΛΗ: • Ναυαρίνου 12, τηλ. 2109944396,

ΓΛΥΦΑΔΑ: Λ. Βουλιαγμένης 147 & Πραξιτέλους 2, τηλ. 2109680008

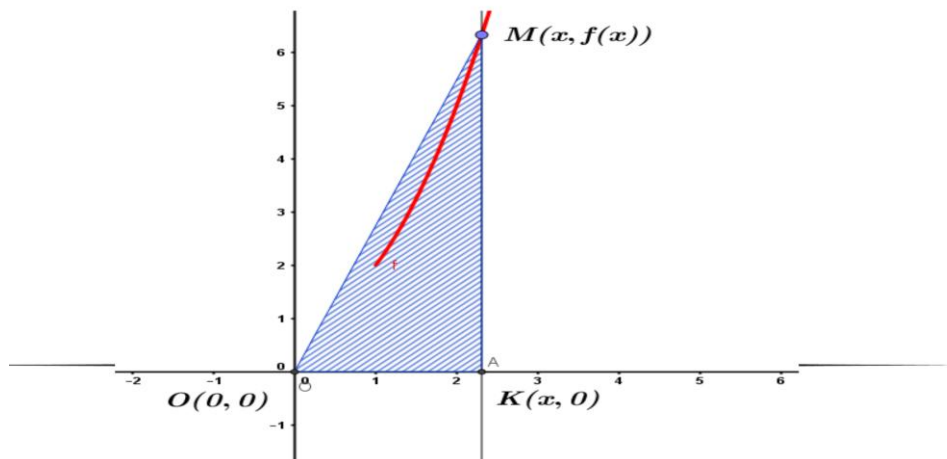
email : support@romvos.edu.gr

ii. $f^2(x) - x_0 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)(f(x) - x_0) = 0$ αδύνατη

διότι $f(x) \neq 0$ στο $(x_0, +\infty)$

Αν $x > x_0 \xrightarrow{f \uparrow} f(x) > f(x_0) = 0$ άρα $f(x) - x_0 > -x_0 > 0$

Γ4.



$x(t) > 0, y(t) > 0$ τότε

$$E(t) = \frac{1}{2} x(t) \cdot \psi(t) = \frac{1}{2} x(t) \cdot [x^2(t) + 1] = \frac{x^3(t) + x(t)}{2}$$

$$E'(t) = \frac{3x^2(t) \cdot x'(t) + x'(t)}{2}$$

$$\text{Αν } t = t_0 : E'(t_0) = \frac{3x^2(t_0)x'(t_0) + x'(t_0)}{2} = \frac{3 \cdot 3^2 \cdot 2 + 2}{2} = \frac{56}{2} = 28 \mu^2 / s$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Πρέπει $f(1) = 1$ και $f'(1) = 1$

- $f(1) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$ (1)

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + (x-1) \frac{1}{x^2 - 2x + 2} (2x-2) + \alpha$$

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} + \alpha$$

$$f'(1) = -1 \Leftrightarrow \ln 1 + \frac{2(1-1)}{1-2+2} + \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -1$$
 (2)

Από (1),(2) έχουμε $\alpha = -1$ και $\beta = 2$

Δ2. f και $-x+2$ συνεχής στο $]$ τότε ισχύει :

$$E = \int_1^2 |f(x) - (-x+2)| dx = \int_1^2 |f(x) + x - 2| dx$$

$$\text{Για κάθε } x \in [1, 2] \quad f(x) + x - 2 = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2 + x - 2 = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) \geq 0$$

$$\text{Οπότε } E = \int_1^2 (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) dx$$

$$\text{Θέτω } x^2 - 2x + 2 = u$$

$$2(x-1)dx = du$$

x	1	2
u	1	2

Άρα

$$E = \int_1^2 \frac{1}{2} \ln u du = \frac{1}{2} \int_1^2 \ln u du = \frac{1}{2} \int_1^2 u' \ln u du = \frac{1}{2} [u \ln u]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 u \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} (2 \ln 2 - 1 \ln 1) - \frac{1}{2} [u]_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2} \text{ τ.μ}$$

Δ3. i. Είδαμε ότι :

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1$$

$$\text{Έχουμε } f'(x) \geq -1 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1 \geq -1 \Leftrightarrow \ln[(x-1)^2 + 1] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0$$

Που ισχύει αφού :

$$(x-1)^2 + 1 \geq 1 \xrightarrow{\ln x \uparrow (0, +\infty)} \ln((x-1)^2 + 1) \geq \ln 1 \Rightarrow \ln[(x-1)^2 + 1] \geq 0 \text{ και } \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0$$

ii. Η f συνεχής στο $\left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right]$ αφού για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ $0 < \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda < \lambda + \frac{1}{2}$

παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right)$

από ΘΜΤ υπάρχει $\xi \in \left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right)$

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\lambda + \frac{1}{2} - \lambda}$$

Όμως

$$f'(\xi) \geq -1 \Rightarrow \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1 \Rightarrow$$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) - \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq (\lambda - 1)\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + 2 - \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1)(\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2)) + \frac{3}{2}$$

Δ4. Έστω $A(x_1, f(x_1)) \in C_f$ και $B(x_2, g(x_2)) \in C_g$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(x_1, f(x_1))$ είναι

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) = f'(x_1)x + f(x_1) - f'(x_1)(x_1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $B(x_2, g(x_2))$ είναι :

$$y = g'(x_2)(x - x_2) + g(x_2) = g'(x_2)x + g(x_2) - x_2g'(x_2)$$

Η C_f και η C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη αν και μόνο αν υπάρχουν X_1, X_2 ώστε:

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x_1) = g'(x_2) \\ f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(x_1) = -3x_2^2 - 1 \quad (1) \\ f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2 \end{array} \right\} (\Sigma)$$

Όμως $f'(x_1) \geq -1$ και $-3x_2^2 - 1 \leq -1$

Άρα για να ισχύει η (1) πρέπει :

$$f'(x_1) = -1 \quad \text{και} \quad -3x_2^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x_1) = -1 \quad \text{και} \quad x_2 = 0$$

Όμως

$$f'(x_1) = -1 \Leftrightarrow \ln\left[(x-1)^2 + 1\right] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} - 1 = -1 \Leftrightarrow \ln\left[(x-1)^2 + 1\right] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Αφού $\ln\left[(x-1)^2 + 1\right] \geq 0$ και $\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο 1

$$\text{Άρα } f'(x_1) = -1 \Leftrightarrow x_1 = 1$$

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \quad \text{και} \quad x_2 = 0 \\ f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x_1 = 0 \quad \text{και} \quad x_2 = 0$$

Αφού επαληθεύουν και την :

$$f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2$$

Για $x_1 = 1$ έχουμε :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = -1(x-1) + 1 = -x + 1 + 1 = -x + 2$$

Συγγραφική Ομάδα Μαθηματικών ΡΟΜΒΟΥ

ΑΡΓΥΡΟΥΠΟΛΗ: • Κύπρου 51, τηλ. 2109941471, 2109935566 • Γερουλάνου 103, τηλ. 2109911067

ΗΛΙΟΥΠΟΛΗ: • Ναυαρίνου 12, τηλ. 2109944396,

ΓΛΥΦΑΔΑ: Λ. Βουλιαγμένης 147 & Πραξιτέλους 2, τηλ. 2109680008

email : support@romvos.edu.gr